Universidad Nacional de Ingeniería **25-11-06**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-2**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DE LA TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO

Se permite el uso de una hoja de formulario:

Problema 1

a) Para el siguiente sistema de ecuaciones hallar una estimación de la solución para la primera iteración usando el método de Newton-Rapshon.

$$y^2 + \sin(x) = \cos(x^3)$$
$$\cos^2(x) = e^y$$

Considere (xo,yo) = (0,1)

Solución:

$$F = \begin{bmatrix} y^2 + \sin(x) - \cos(x^3) \\ \cos^2(x) - e^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f1 \\ f2 \end{bmatrix}$$

$$J_F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f1}{\partial x} & \dfrac{\partial f1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f2}{\partial x} & \dfrac{\partial f2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x) + 3x^2\sin(x^3) & 2y \\ -2\cos(x)\sin(x) & -e^y \end{bmatrix}$$

$$X_{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-e \end{bmatrix} \qquad J_F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -e \end{bmatrix}$$

$$X_{(1)} = X_{(0)} - inv(J_F) * F$$

$$X_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.7358 \\ 0 & -0.3679 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1-e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2642 \\ 0.3679 \end{bmatrix}$$

b) Hacer la función que calcule los coeficientes del polinomio usando el método de vandermonde (o matricial),

```
function [c]=vander_metodo(x,y)
x: vector con la var. Independiente
y: vector con la var. Dependiente o función
c:valor de los coeficientes del Polinomio.
```

```
Ejemplo:  x=[-1   0  1];
          y= [0  -1  0]
          c=vander_metodo(x,y)
          c=[ 1 0  -1]
```

Los Profesores

Solución:

dos versiones

```
function [c]=vander_metodo(x,y)
  A=vander(x);
  c=A\y';
  c=c';
```

```
function [c]=vander_metodo1(x,y)
N=length(x);
A=[];
for i=n-1:-1:0
A=[A  x'.^(i)];
end;
c=A\y';
c=c';
```

c) El polinomio de Newton $p_2(x) = 2x - \frac{1}{9}x(x-6)$ interpola la siguiente tabla x vs.y

x_i	0	6	15
y_i	0	12	¿?

Se agrega como cuarto nodo a x_3=30 y y_3=0. Se pide calcular el polinomio de Newton $p_3(x)$ que interpola la nueva tabla.

Solución:

en x_3=30 y y_3=0 $p_3(30) = 2x - \frac{1}{9}x(x-6) + b_3 x(x-6)(x-15)\Big|_{x=30} = 0$

b3=1/540

$$p_3(x) = 2x - \frac{1}{9}x(x-6) + \frac{1}{540}x(x-6)(x-15)$$

d) Dada la tabla:

x	1	2	3
y	2	w	5

Para que valores de a y w, la recta de ajuste por mínimos cuadrados será de la forma: y=ax+1?

Solución:

Sea la ecuacion de ajuste por mínimos cuadrados:

$$\begin{bmatrix} \sum x^2 & \sum x \\ \sum x & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum xy \\ \sum y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2w+15 \\ 2+w+5 \end{bmatrix}$$

Resolviendo: $a = 3/2 \quad w = 5$

e) Hallar a_1 y a_2 para que la fórmula de derivación numérica:

$$f'(x) \approx a_1 f(0) + a_2 f(0.5)$$

sea exacta para las funciones 1 y x.

Solución:

sea exacta para las funciones 1 y x.

Si f(x)=1 ➔ f'(x)=0 = a_1f(0)+a_2f(0.5) = a_1*1+a_2*1= a_1+a_2

Si f(x)=x ➔ f'(x)=1 = a_1f(0)+a_2f(0.5) = a_1*0+a_2*0.5= a_2*0.5

Por lo tanto

a_2=2 y a_1=-2

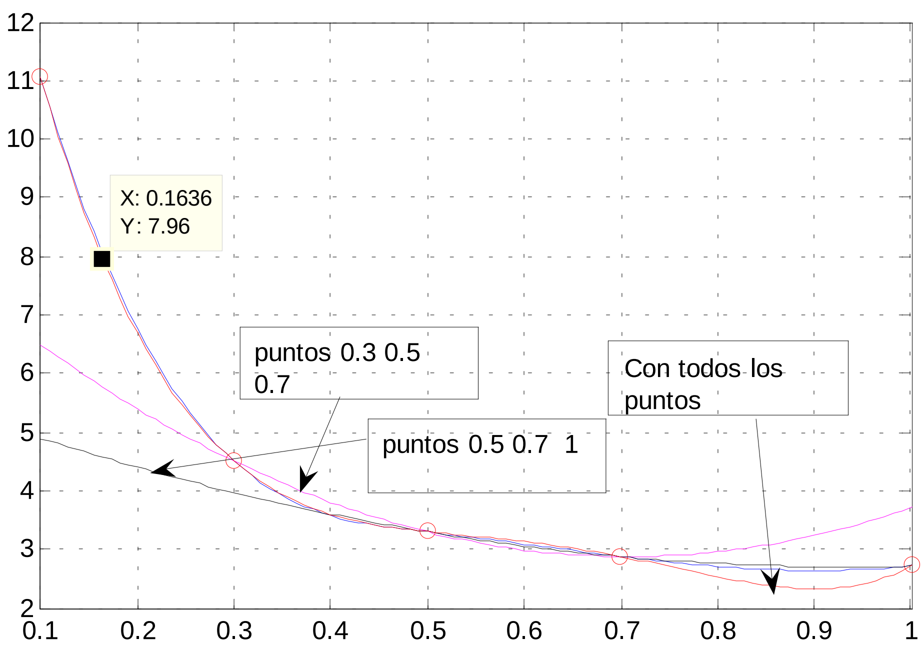
Problema 2

Use la forma de Newton del polinomio interpolante y Lagrange para encontrar los polinomios interpolantes más apropiados de grado dos, para aproximar f(.4)y f(.6)a partir de los siguientes datos, y calcule la aproximación en cada caso.

X	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0
f(x)	11.052	4.4995	3.2974	2.8768	2.7183

En cada caso busque la mejor aproximación posible.

Solución



tomando todos los puntos

$P_4(x)$= 95.2546x^4-247.5927x^3+234.4658x^2 -98.1719x+18.7626

$P_4(0.4)$= 3.6009

$P_4(0.6)$= 3.1321

D =

11.0520	0	0	0	0
4.4995	-32.7625	0	0	0
3.2974	-6.0105	66.8800	0	0
2.8768	-2.1030	9.7687	-95.1854	0
2.7183	-0.5283	3.1493	-9.4563	95.2546

Se escoge el camino de los últimos puntos porque son mas bajas sus diferencias.
Puntos x= 0.5 0.7 1
D =

3.2974	0	0
2.8768	-2.1030	0
2.7183	-0.5283	3.1493

Polinomio de newton
$P_2(x)=3.1493x^2 -5.8822x+5.4512$
$P_2(0.4)= 3.6022$ a pesar de estar extrapolando
$P_2(0.6)= 3.0556$
Se comete el menor error e2(0.4)= 0.0013 e2(0.6)= 0.0765 (comparando con los valores mas exactos obtenidos con el polinomio de grado 4).
Polinomio de Lagrange
$L_o(x)=10x^2-50/3x+20/3$
$L_1(x)= -17 x^2 +25x-8$
$L_2(x)= 7 x^2-25/3x +7/3$
$P2(x)= L_o(x)y_o+ L_1(x)y_1+ L_2(x)y_2$
colocando valores y ordenando
$P_2(x)=3.1493x^2 -5.8822x+5.4512$

Problema 3

A partir de la función $f(x)=3xe^x - e^{2x}$ se han tabulado los siguientes puntos:

x	f(x)
1.00	0.76578938644649
1.02	0.79536677885175
1.04	0.82268817048051
1.06	0.84752225818442

a) Obtener el spline cúbico natural tomando toda la información de esta tabla.
b) Estime f(1.01) y f'(1.02) haciendo uso del spline obtenido en a) y muestre los errores correspondientes.
c) Comente sus resultados.

Solucion

a)

i	hi	x	F(x)	f[,]
0	0.02	1.00	0.76578938644649	1.47886962026340
1	0.02	1.02	0.79536677885175	1.36606958143797
2	0.02	1.04	0.82268817048051	1.24170438519515
		1.06	0.84752225818442	

En este caso:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} f[x_1x_2]-f[x_0x_1] \\ f[x_2x_3]-f[x_1x_2] \end{bmatrix}$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} 0.08 & 0.02 \\ 0.02 & 0.08 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.67680023295260 \\ -0.74619117745689 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = -6.53669918117836 \quad M_2 = -7.69321492291652 \quad M_0 = M_3 = 0$$

$$S(x) = \begin{cases} x \in [1.00, \ 1.02] & -54.47(x-1.00)^3 + 0(x-1.00)^2 + 1.50(x-1.00) + 0.77 \\ x \in [1.02, \ 1.04] & -9.64(x-1.02)^3 - 3.27(x-1.02)^2 + 1.44(x-1.02) + 0.795 \\ x \in [1.04, \ 1.06] & 64.11(x-1.04)^3 - 3.85(x-1.04)^2 + 1.29(x-1.04) + 0.82 \end{cases}$$

b)

S(1.01) = 0.780742
f(1.01) = 0.780846
err = 0.000104

S'(1.02) = 1.435292
f'(1.02) = 1.424342
err = 0.010950

c)

La precisión obtenido es bastante buena para aproximacion de la función mas no asi para el calculo de la derivada.

Problema 4

a) Deduzca una fórmula de aproximación de la segunda derivada de la forma:

$$f''(x_i) \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{f(x_{i-1})}{1+\alpha} - \frac{f(x_i)}{\alpha} + \frac{f(x_{i+1})}{\alpha(1+\alpha)}\right]$$

Obtenida a partir del polinomio interpolante de Lagrange, que pasa por los puntos $\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))\}$ donde $x_{i+1} - x_i = \alpha h; \quad x_i - x_{i-1} = h$

b) Usando la fórmula deducida en a) obtenga una aproximación de la segunda derivada en x=1, y su error para la siguiente función. $f(x) = x^2 e^{\sqrt{x}}$, tome $\alpha = 1, \quad h = 0.1$

Solución

a)

$$f(x) \approx \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} f(x_{i-1}) + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} f(x_i) +$$
$$\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} f(x_{i-1})$$

$$f(x) \approx \frac{(x^2-(x_i+x_{i+1})x+x_ix_{i+1}}{(-h)(-)(\alpha h+h)} f(x_{i-1}) + \frac{(x^2-(x_{i-1}+x_{i+1})x+x_{i-1}x_{i+1}}{(h)(-\alpha h)} f(x_i) +$$
$$\frac{(x^2-(x_{i-1}+x_i)x+x_{i-1}x_i}{(\alpha h)(\alpha h+h)} f(x_{i+1})$$
$$f'(x) \approx \frac{(2x-(x_i+x_{i+1}))}{(h^2)(\alpha+1)} f(x_{i-1}) + \frac{(2x-(x_{i-1}+x_{i+1}))}{(h^2)(-\alpha)} f(x_i) + \frac{(2x-(x_{i-1}+x_i))}{(h^2)\alpha(\alpha+1)} f(x_{i+1})$$
$$f''(x) \approx \frac{2}{h^2}\left(\frac{f(x_{i-1})}{\alpha+1} - \frac{f(x_i)}{\alpha} + \frac{f(x_{i+1})}{\alpha(\alpha+1)}\right)$$

b)

$$f\left(x\right) = x^2 e^{\sqrt{x}}$$
$$f''(x) = 2e^{\sqrt{x}} + xe^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{4}\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}x^{3/2}e^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$f''(1) = 4e = 10.8731$$
$$x_i = 1, x_{i+1} = 0.1, x_{i-1} = 0.9$$
$$Aplicando \quad la \quad aproximacion:$$
$$f''(1) \approx 10.8747$$
$$Error = 0.0016$$

Los Profesores